Quelques références pour l'agrégation

Benjamin FAVETTO

23 juillet 2006

Table des matières

1 Développements d'Algèbre et de Géométrie

1.1 Théorème de Molien

[23] exercice 3.34 page 95.

Leçons :
- Dénombrement
- Sous-espaces stables d'un endomorphisme
- Dimension d'un espace vectoriel
- Algèbre des polynômes à n indéterminées
- Groupes opérant sur un ensemble
- Groupes finis

1.2 Transformée de Fourier discrète

[30] page (?). Le but est de montrer que l'on peut multiplier deux polynômes de degré $\leq n$ en $O(n \log n)$. On prouve donc : le théorème sur sur le coût de l'évaluation, celui sur l'interpolation, et enfin le théorème de calcul par homomorphisme.

Leçons :
- Groupe des nombres complexes de module 1
- Racines des polynômes à une indéterminée
- Corps finis

1.3 Système d'inéquations diophantiennes

[46] pages 288 et 291. On prouve le théorème de Minkowski et on l'applique au système d'inéquations diophantiennes de Dirichlet (comment approcher simultanément n réels par des rationnels de même dénominateur avec une précision donnée ?).

Leçons :
- Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$. Réseaux.
- Equations diophantiennes

1.4 Décomposition de Dunford via Newton

[19] page (?). En fait, c'est une version un peu moins conceptuelle du magnifique document de Daniel FERRAND ...

Leçons :
- Endomorphismes nilpotents
- Endomorphismes diagonalisables
- Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs

1.5 Décomposition de Bruhat

[26] page 322. On retiendra les deux applications (actions sur les drapeaux et les couples de drapeaux).

Leçons :
- Exemples de décompositions remarquables dans le groupe linéaire
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes
- Groupe linéaire d'un espace vectoriel
- Groupe des permutations d'un ensemble fini

1.6 Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

[8] page 141. Dur.

Leçons :
- Utilisation de théorèmes de point fixe
- Utilisation de la notion de compacité
- Groupe linéaire d'un espace vectoriel
- Parties convexes, fonctions convexes

1.7 Théorème de Birkhoff

[42] page 59. On prouve le résultat suivant : l'enveloppe convexe des matrices de permutation est l'ensemble des matrices bistochastiques. Voir aussi l'article de Nicolas TOSEL dans la RMS 2005. Attention : dans la preuve de Serre, le serpent ne fonctionne pas immédiatement, mais quitte à réindexer, l'argument reste valable.

Leçons :
- Groupe des permutations d'un ensemble fini
- Barycentres dans un espace affine réel
- Parties convexes, fonctions convexes

1.8 Densité des nombres premiers entre eux

[23] exercice 1.26 page 37. Attention à être au clair sur les fonctions arithmétiques et leur produit de convolution.

Leçons :
- Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement
- Convergence des suites numériques

1.9 Primalité des nombres de Mersenne

[30] page 80. On montre l'équivalence avec la congruence. Peut aussi s'énoncer différemment via le test de Lucas-Lehmer. Un peu long.

Leçons :
- Nombres premiers
- Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Corps finis
- Exemples d'applications des idéaux d'un anneau
- Polynômes irréductibles, corps de rupture

1.10 Groupes d'ordre 12

[43] exercice 1.14 page 19. On détermine à ismorphisme près tous les groupes d'ordre 12. Demande d'être au point sur les théorèmes de Sylow et le produit semi-direct.

Leçons :
- Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients
- Groupes finis
- Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

1.11 Endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ préservant $GL_n(\mathbb{C})$

[26] page 299.

Leçons :
- Dimension d'un espace vectoriel. Rang
- Réduction d'un endomorphisme
- Matrices semblables, matrices équivalentes
- Endomorphismes nilpotents

1.12 Ellipse de Steiner

[45] page 9. Attention, la présentation de Marden est un peu plus générale que le résultat que l'on veut obtenir : soient trois points non alignés dans le plan complexe, d'affixes z_1, z_2, z_3 et $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$. Alors les racines de P' sont les foyers d'une ellipse tangente aux trois cotés du triangle formé par les trois points en leurs milieux. Voir pour cela le document de Michel COSTE.

Leçons :

- Coniques
- Applications des nombres complexes en géométrie
- Racines des polynômes
- Angles, définition et utilisation en géométrie

1.13 Théorème de Wantzel

[13] page 18-19.

Leçons :

- Constructions à la règle et au compas

1.14 Convergence d'une suite de polygônes

Voici un développement original dû à Lionel, d'après une discussion sur le forum des mathematiques.net. Le calcul du déterminant circulant est fait dans Gourdon.

Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ n points du plan complexe donnés par leur affixe. Ils définissent – dans cet ordre – un polygône, non nécéssairement convexe, donné par la liste de ses sommets. On définit alors par récurrence une suite de polygônes $(\mathcal{P}_k)$ en prenant pour sommets de $\mathcal{P}_{k+1}$ les milieux des arêtes de $\mathcal{P}_k$, de sorte que

$$\begin{cases} \underline{x}^0 = x \\ \underline{x}^{k+1} = \left(\frac{x_1^k + x_2^k}{2}, \ldots, \frac{x_n^k + x_1^k}{2}\right) \end{cases}$$

Alors : $\underline{x}^k \longrightarrow_{k\to\infty} (g, \ldots, g)$ où g est l'isobarycentre de $\mathcal{P}_1$. ($g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$)

En effet, on a : $\underline{x}^{k+1} = A\underline{x}^k$, où

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et par suite $\underline{x}^k = A^k\underline{x}^0$. Montrons alors que $(A^k)_k$ converge dans $M_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme d'algèbre $\|.\|$:

Pour cela on étudie les valeurs propres de A.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix}$$

On reconnait alors un déterminant circulant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_2 & \dots & a_n & a_{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^{n} P(\omega^j)$$

où $\omega = e^{\frac{2\imath\pi}{n}}$ et $P(Y) = \sum_{k=1}^{n} a_k Y^{k-1}$. Ainsi :

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2} - \lambda + \frac{1}{2}\omega^j\right).$$

Les valeurs propres de A sont donc les $y_j = \frac{1+\omega^j}{2}, j = 1, \dots, n$; qui sont toutes distinctes. A est diagonalisable : il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P^{-1}DP$ où $D = \mathrm{diag}(y_1, \dots, y_n)$.

Or, pour $j \in \{1, \dots, n-1\}$, $|y_j| = \left|\frac{1+\omega^j}{2}\right| = |\cos(\frac{\pi j}{n})| < 1$. Donc : $A^k \longrightarrow_{k\to\infty} P^{-1}\mathrm{diag}(0, \dots, 0, 1)P$.
En notant $B = \lim A^k$ et $\underline{z} = Bx$, $\underline{x}^k \longrightarrow \underline{z}$ et par continuité de A et passage à la limite, $\underline{z} = A\underline{z}$. Ainsi,

$$\begin{cases} z_1 = \frac{z_1+z_2}{2} \\ \vdots \\ z_n = \frac{z_n+z_1}{2} \end{cases}$$

et alors $\underline{z}$ est proportionnel au vecteur $(1, \dots, 1)$, i.e. $\underline{z} = (z, \dots, z)$. Enfin, on remarque que si g est l'isobarycentre de $\mathcal{P}_0$, par associativité il est encore isobarycentre de $\mathcal{P}_k$ pour $k \geq 1$. Par continuité g est encore l'isobarycentre de $\underline{z}$, d'où $z = g$. $\square$

Leçons :
- Applications des nombres complexes en géométrie
- Barycentres dans un espace affine
- Déterminant
- Groupe des nombres complexes de module 1

1.15 Algorithme des facteurs invariants

[31] et aussi [1] page 123. On pourra consulter utilement la preuve d'Artin dans Algebra page 459. Attention, chez Goblot, le stathme est particulier, ce qui rend la preuve moins lisible et un peu plus conceptuelle, alors que l'algorithme décrit par Artin ne nécessite pas de stathme particulier (mais est un peu plus long peut être en calcul effectif). La preuve dans le cas d'un anneau principal n'est pas plus difficile, mais dans les applications, pour trouver une combinaison de Bézout, on utilise souvent un algorithme d'Euclide ... La preuve de l'unicité est bien faite chez Goblot.

Leçons :
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes
- Matrices équivalentes, matrices semblables
- Anneaux principaux
- Equations diophantiennes

1.16 Sous-groupes finis de SO_3

[5] page 377. A moins d'enflammer la craie, il semble raisonnable de faire la partie analyse combinatoire, ainsi que les groupes cycliques, diédraux, le groupe de déplacements du tétraèdre, et éventuellement celui du cube, mais d'admettre le résultat sur le dodécaèdre. Attention à prendre la bonne définition de polyèdre régulier.

Leçons :
- Sous-groupes finis de O_2 et O_3
- Groupes finis
- Groupes opérant sur un ensemble
- Isométries d'un espace affine euclidien
- Utilisation des groupes en géométrie

1.17 Comptage de racines et formes quadratiques

[7] page 199.

Leçons :
- Racines des polynômes
- Polynômes à n indéterminées
- Formes quadratiques

1.18 Critère de finitude de Burnside

[8] page 113.

Leçons :
- Endomorphismes nilpotents

1.19 Automorphismes de corps de $\mathbb{K}(X)$

[26] page 225.

Leçons :
- Corps des fractions rationnelles

1.20 Simplicité de $PSL(E)$ pour $\dim E \geq 3$

[1] page 234.

Leçons :
- Formes linéaires et hyperplans en dimension finie
- Exemples de groupes quotients

1.21 Isométries du tétraèdre et du cube

[5] page 307. Voir aussi Thèmes de géométrie de Goblot page 136.

Leçons :
- Groupe des permutations d'un ensemble fini
- Sous-groupes finis de O_2 et O_3 .
- Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien
- Isométries d'un espace affine euclidien
- Utilisations des groupes en géométrie
- Applications affines

1.22 Décomposition polaire

[11] page 17. On pourra enrichir utilement la démonstration avec le résultat suivant de [42] : soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ stable par adjoint et tel que si $M \in G \cap HDP$ alors $\sqrt{M} \in G$; alors $G \simeq (G \cap U_n) \times (G \cap HDP)$.

Leçons :
- Exemples de decompositions remarquables dans le groupe linéaire
- Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien / hermitien
- Groupe linéaire d'un espace vectoriel
- Polynômes d'endomorphismes

1.23 Irréductibilité des polynômes cyclotomiques

[18] page 68.

Leçons :
- Polynômes irréductibles
- Groupe des nombres complexes de module 1

1.24 Théorème de Cartan

[14] page 96. L'énoncé de Cartan-Dieudonné est à connaître mais est un peu long à faire.

Leçons :
- Groupe orthogonal d'une forme quadratique
- Formes quadratiques
- Exemples de parties génératrices d'un groupe

1.25 Construction du polygône à 15 côtés

[13] page (?).

Leçons :
- Angles, définition et utilisation
- Constructions à la règle et au compas
- Problèmes d'angles et de distances en dimension 2 et 3

1.26 Générateurs du groupe affine

[5] page 96.

Leçons :
- Applications affines
- Utilisation des groupes en géométrie
- Exemples de parties génératrices d'un groupe

1.27 Equations diophantiennes et séries génératrices

[29] page 160. Il est intéressant de noter que ce résultat asymptotique donne l'existence de solutions en entiers naturels, à partir d'un certain rang, que ce rang peut être précisé facilement pour deux entiers, mais pas au-delà.

Leçons :
- Equations diophantiennes
- Fractions rationnelles
- Convergence des séries entières, propriétés de la somme

1.28 Diagonalisabilité de $\exp(u)$

[2] page 215.

Leçons :
- Endomorphismes diagonalisables
- Réduction d'un endomorphisme
- Exponentielle de matrices

1.29 Principalité de $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$

[23] page 32. Attention, il y a besoin d'étendre le morphisme à $\mathbb{C}(X)[Y]$ pour pouvoir effectuer la division euclidienne. (Merci Mikaël)

Leçons :
- Anneaux principaux
- Exemples d'applications des idéaux d'un anneau
- Algèbre des polynômes à n indéterminées

1.30 Anneaux d'entiers quadratiques

[31] page 57. On montre que pour $d \in \{-1,-2,-3,-7,-11\}$ l'anneau $\mathbb{Z}_{(d)}$ est euclidien, par des considérations géométriques sur la maille du réseau.

Leçons :
- Réseaux
- Anneaux principaux

1.31 Théorème de Pascal

[47] page 86. Attention à bien préciser le sens de point d'intersection pour que la preuve fonctionne. Tel monsieur Jourdain faisant du projectif sans le savoir ...

Leçons :
- Coniques
- Déterminant
- Barycentres, convexité

1.32 Théorème de Sophie Germain

[26] page 153.

Leçons :
- Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Equations diophantiennes
- Nombres premiers - applications

1.33 Réduction des endomorphismes normaux

[14] page 294.

Leçons :
- Endomorphismes diagonalisables
- Endomorphismes remarquables d'un espace hermitien

1.34 Réduction de Frobenius

[1] et Gourdon, Algèbre, page 279.

Leçons :
- Réduction d'un endomorphisme
- Polynômes d'endomorphismes, polynômes annulateurs
- Sous-espaces stables
- Formes linéaires et hyperplans en dimension finie.

2 Développements d'Analyse et de Probabilités

2.1 Théorème de Chudnowski

[24] exercice 5.2 page 119 et [25] exercice 1.7 page 17. Voir aussi l'exercice 2.18 de [29]. A noter que le résultat est n'est plus toujours valable si la longueur de l'intervalle est ≥ 1, et l'on peut s'interroger sur les longueurs d'intervalle pour lesquelles le résultat est valable. Une telle discussion est menée dans un article de la RMS de (?).

Leçons :
- Utilisation de la notion de compacité
- Utilisation de la continuité uniforme
- Exemples de parties denses
- Suites et séries de fonctions
- Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales

2.2 Théorème de Stampacchia

[32] page 83.

Leçons :
- Utilisation de théorèmes de point fixe
- Méthodes hilibertiennes
- Parties convexes, fonctions convexes
- Espaces complets

2.3 Théorème de Kuhn et Tucker

[33] page 75. Voir une application à l'optimisation d'un portefeuille dans G. Demange, Mathématiques apliquées pour la finance. L'avantage de la preuve de [33] est qu'elle n'utilise pas la notion de sous-différentiel comme dans le livre de Rockafellar.

Leçons :
- Problèmes d'extrema
- Fonctions monotones, fonctions convexes
- Parties convexes, fonctions convexes

2.4 Théorème de D.J. Newmann

[34] page 480 (lemme 2.5). Il est intéressant de connaître l'application de ce théorème à la preuve du théorème des nombres premiers. La dernière majoration obtenue par une intégration par parties peut être remplacée par un argument de convergence dominée afin de gagner un peu de temps (merci Seb. G). On pourra aussi consulter l'article de D. Zagier dans l'A.M.M. de 1997.

Leçons :
- Fonctions d'une variable complexe, holomorphie
- Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$
- Exemples de problèmes d'interversion de limites
- Fonctions définies par une intégrale à paramètre
- Interversion d'une limite et d'une intégrale
- Prolongement de fonctions
- Problèmes de convergence d'une intégrale sur $\mathbb{R}$

2.5 Théorème de Borel

[26] page 265 et [34] page 239. On construit une fonction-plateau puis la fonction solution du problème à l'aide d'une série.

Leçons :
- Continuité et dérivabilité des fonctions numériques
- Suites et séries de fonctions

– Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries

2.6 Théorème de Kolmogorov

[3] exercice 3.24 page 49. Voir aussi [40] pour une preuve très détaillée.

Leçons :
- Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités
- Le jeu de pile ou face
- Indépendance d'évènements et de variables aléatoires

2.7 Le folium de Descartes

[37] exercice 6.75.

Leçons :
- Applications du théorème des fonctions implicites
- Etude de courbes

2.8 Le processus de Galton - Watson

[38] page 154. Voir aussi une estimation de la vitesse de convergence dans les pages suivantes. Dans les cas sous-critique et critique, la courbe représentative de G ne coupe pas la diagonale du carré $[0,1]^2$ ailleurs qu'en $(1,1)$ car G est convexe et analytique - si deux fonctions analytiques coïncident sur un ouvert elles sont égales. De même dans le cas sur-critique, $G' - 1$ est strictement croissante.

Leçons :
- Convergence des suites numériques
- Comportement asymptotique des suites numériques
- Comportement d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$
- Fonctions monotones, fonctions convexes
- Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries
- Indépendance de variables aléatoires et d'évènements

2.9 Sous-espaces stables par translation de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

[24] page 92. On pourra démontrer le résultat dans le cas de la dimension n : pour cela on utilise le lemme suivant : soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions libres dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $(f_i(x_j))$ soit inversible. En effet on pose $V = Vect\{\delta_x|_F, x \in \mathbb{R}\}$, et F^* le dual de F, de dimension n. Alors $V^\perp = \{f \in F, \forall x \in \mathbb{R} f(x) = 0\} = \{0\}$. V engendre F^* et il existe $x_1, \ldots, x_n$ tels que $V = Vect\{\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_n}\}$. (Merci

Seb. G) On pourra à ce propos consulter [1] ou voir une autre méthode par développement selon une colonne dans [27]. Mon développement fétiche.

Leçons :
- Continuité et dérivabilité de fonctions numériques
- Equations différentielles linéaires
- Sous-espaces stables d'un endomorphisme
- Utilisation de la dimension finie en analyse
- Polynômes annulateurs, polynômes d'endomorphisme
- Déterminant

2.10 Théorème de Sarkovski

[26] exercice 2.21.

Leçons :
- Comportement asymptotique des suites numériques
- Comportement d'une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$
- Connexité. Exemples et applications.

2.11 Méthode de la phase stationnaire

[24] exercice 9.2 page 211. Voir aussi [39] pour les applications de la méthode, et aussi pour comprendre d'où viennent les hypothèses sur les fonctions (type Bessel ...).

Leçons :
- Problèmes de convergence et de divergence d'une intégrale
- Fonctions définies par une intégrale à paramètre
- Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle
- Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul intégral

2.12 Théorème de Prohorov

[10] exercice 4.8 page 114. Attention à être au point sur les questions de convergence de mesure. C'est un résultat de compacité séquentielle pour la topologie *-faible, il est aussi bon d'être au point sur Banach-Alaoglu. Le lemme de Helly utilisé ici peut faire un développement en soi.

Leçons :
- Utilisation de la notion de compacité
- Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités
- Suites et séries de fonctions
- Fonctions monotones, fonctions convexes

– Prolongement de fonctions

2.13 Théorème de Korovkine

[29] exercice 2.20 page 135. On prouvera aussi en corollaire le théorème de Weierstrass à l'aide des polynômes de Bernstein, qui fournissent une suite d'opérateurs positifs.

Leçons :
- Applications linéaires continues entre e.v.n
- Espaces de fonctions
- Approximation des fonctions numériques par des polynômes
- Utilisation de la continuité uniforme en analyse

2.14 Dénombrement asymptotique de Gauss

[29] exercice 3.23 page 210.

Leçons :
- Convergence des séries entières, propriétés de la somme
- Développement asymptotique d'une fonction d'une variable réelle
- Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

2.15 Série génératrice des nombres de Bernoulli

[29] page 297.

Leçons :
- Développement d'une fonction périodique en série de Fourier
- Convergence des séries entières, propriétés de la somme
- Suites et séries de fonctions
- Exemples d'utilisation de fonctions définies par une série

2.16 Exemple de Stoyanov

[40] exercice 12.1 page 217. A mettre en regard avec le théorème de Shannon sur l'espace BL^2.

Leçons :
- Développement d'une fonction périodique en série de Fourier
- Transformation de Fourier, produit de convolution
- Fonctions définies par une intégrale à paramètre

2.17 Le billard elliptique

[37] exercice 12.8. Attention à bien reprendre les espaces où l'on différentie : on note $\vec{u} = \vec{OU}$, $\vec{v} = \vec{OV}$, $\vec{UV} = \vec{v} - \vec{u}$. Ainsi, $f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v}-\vec{u}\| + \|\vec{w}-\vec{v}\| + \|\vec{u}-\vec{w}\|$. Le fait que le triplet de vecteurs où le maximum est atteint sur $E \times E \times E$ est composé de vecteurs distincts résulte de l'inégalité triangulaire ! Enfin la différentielle de $x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est $h \mapsto \langle \frac{x}{\|x\|}, h\rangle$. Un joli développement.

Leçons :
- Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$
- Problèmes d'extrema
- Applications du théorème des fonctions implicites

2.18 Equirépartition modulo 1

[25] exercice 7.4 page 133.

Leçons :
- Intégration des fonctions d'une variable réelle
- Convergence des suites numériques
- Comportement asymptotique des suites numériques

2.19 Compacité dans $L^p(\mathbb{R})$

[41] page 367. On pourra aussi voir [32], théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov page 72. Attention à être bien au point sur les suites régularisantes.

Leçons :
- Intégration des fonctions d'une variable réelle
- Espaces L^p
- Utilisation de la notion de compacité
- Transformation de Fourier, produit de convolution

2.20 Compacité dans les Banach

[44] page 91. Faire aussi l'application aux compacts de $l^1(\mathbb{N})$. On pourra s'interroger utilement, à la lecture de ce résultat, sur le lien entre ce théorème et le cas particulier des espaces L^p décrit précédemment ...

Leçons :
- Espaces complets
- Utilisation de la notion de compacité en analyse
- Utilisation de la dimension finie en analyse

2.21 Fonctions continues nulle part dérivables

[34] page 263. Connaître un exemple explicite de fonction continue non-dérivable.

Leçons :

– Exemples de parties denses et applications
– Espaces de fonctions
– Espaces complets
– Continuité et dérivabilité des fonctions numériques
– Exemples d'utilisation de fonctions définies par des séries

2.22 Autour de la fenêtre de Viviani

[37] page 257 et [48] page 205. Attention lorsqu'on calcule l'aire de la fenêtre à ne pas se tromper avec son complémentaire ! (Merci Marc)

Leçons :

– Etude de courbes
– Etude de surfaces
– Applications du théorème des fonctions implicites

2.23 Théorème ergodique de Von Neumann

[2] exercice 3.6 page 137.

Leçons :

– Méthodes hilbertiennes
– Applications linéaires continues entre e.v.n.

2.24 Espérance conditionnelle

[3] page 95 et [4] page 165. On remarquera, comme le fait Revuz, que l'on considère dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ le sous-espace vectoriel des classes d'équivalences de variables aléatoires qui contiennent une variable aléatoire $\mathcal{B}$-mesurable. On construit ensuite le prolongement à L^1 par convergence monotone.

Leçons :

– Methodes hilbertiennes
– Espaces de fonctions
– Applications linéaires continues entre e.v.n.
– Prolongement de fonctions
– Espaces L^p

2.25 Etude du système proie prédateur

[9] page 137. Attention, l'argument de stricte monotonie pour la périodicité à la fin mérite d'être un peu développé à l'oral.

Leçons :
- Exemples d'équations différentielles, solutions exactes ou approchées
- Equations différentielles, étude qualitative des solutions

2.26 Indépendance et normalité

[10] page 212. Attention, à la fin de la preuve, il n'est pas évident de pouvoir utiliser une équation différentielle en posant $\psi = \log \phi$ car une fonction caractéristique est *a priori* à valeurs complexes, ce qui demande de prendre une détermination du logarithme. Il suffit alors d'étudier $\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)' = -\sigma^2$ pour contourner ce problème, en intégrant une fois compte tenu des conditions en 0, puis de se ramener à une équation d'ordre un, que l'on sait intégrer "à la main" sans problème - surtout ne pas faire apparaître un log !

Leçons :
- Indépendance de variables aléatoires
- Variables gaussiennes
- Transformée de Fourier, produit de convolution

2.27 Méthode de Romberg

[17] page 83

Leçons :
- Méthodes de calcul approché d'intégrales
- Applications des formules de Taylor
- Développement asymptotique d'une fonction numérique

2.28 Zéros des solutions d'une E.D. linéaire

[9] page 144.

Leçons :
- Equations différentielles linéaires
- Exemples d'équations différentielles, solutions exactes ou approchées
- Equations différentielles, étude qualitative des solutions

2.29 Densité des polynômes orthogonaux

[2] exercice 3.7 page 140. Rentable !

Leçons :
- Bases hilbertiennes
- Méthodes hilbertiennes
- Fonctions définies par une intégrale
- Exemples de parties denses
- Approximation des fonctions numériques par des fonctions polynômiales
- Fonctions d'une variable complexe, holomorphie
- Fonctions holomorphes et méromorphes

2.30 Inégalité de Carleman

[28] page 197. Un rapport de jury parlait de cette inégalité comme d'un développement possible. Pour en savoir plus sur le théorème de Denjoy-Carleman, on peut consulter Rudin.

Leçons :
- Séries de nombres réels ou complexes
- Exemples et contre-exemples pour les séries numériques

2.31 Lemme de Morse

[37] page 327. Connaître l'application au plan tangent à une surface.

Leçons :
- Applications des formules de Taylor
- Etude locale de surfaces
- Applications du théorème d'inversion locale
- Applications différentiables

2.32 Théorème de Shannon

[49] page 126. Il y a plusieurs choses auxquelles il faut faire attention : tout d'abord, je pense qu'il faut dès l'énoncé dire que l'on va montrer que $u \in BL^2$ admet un représentant continu, qu'il est donc unique, puis que cela légitime l'évaluation sur les entiers. Enfin, il faut être au point sur la transformée de Fourier.

Leçons :
- Espaces de fonctions
- Espaces complets
- Bases hilbertiennes
- Méthodes hilbertiennes
- Transformation de Fourier

- Utilisation de la dénombrabilité en analyse et en probabilités

2.33 Problème du scrutin

[15] page 35-37 et [10] page 19.

Leçons :
- Loi binomiale, loi de Poisson
- Le jeu de pile ou face
- Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

2.34 Nombre de diviseurs d'un entier

[28] page 160. Original.

Leçons :
- Séries de nombres réels ou complexes
- Illustrer par des exemples la théorie des séries numériques

2.35 Formule d'inversion de Fourier

[16].

Leçons :
- Exemples de problèmes d'interversion de limites
- Transformation de Fourier, produit de convolution
- Interversion d'une limite et d'une intégrale

2.36 Composantes connexes de $O(p, q)$

[42] page 84. Admettre l'homéomorphisme réalisé par l'exponentielle entre H et HDP. Un peu long.

Leçons :
- Groupe orthogonal d'une forme quadratique
- Formes quadratiques
- Exponentielle de matrices
- Connexité

2.37 Uniforme continuité dans $L^{\infty}(\mathbb{R})$

[20] page 161. Cet exercice fût posé en question à un oral sur la leçon "Uniforme continuité".

Leçons :
- Utilisation de la continuité uniforme
- Espaces L^p

2.38 Formule des compléments

[21] page 249. Le contour utilisé ici est un pac-man. On peut aussi utiliser un rectangle, ce qui évite la discussion sur la détermination du logarithme, mais augmente les calculs.

Leçons :
- Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul intégral
- Interversion d'une limite et d'une intégrale
- Fonctions d'une variable complexe, holomorphie
- Fonctions holomorphes et méromorphes

2.39 Lois Gamma, lois Bêta

[10] page 83.

Leçons :
- Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul intégral

2.40 Test du χ^2

[22] page 175.

Leçons :
- Loi binomiale, loi de Poisson
- Variables gaussiennes

3 Programmes pour l'épreuve de Modélisation

Ces programmes Scilab sont disponibles ici.

3.1 Quelques illustrations des théorèmes au programme

```
//Illustration de la convergence en loi via un histogramme

function convloi()
Z=[];
for i=1:1000
X=grand(1,1000,"def");  //loi uniforme sur [0,1[
Z=[Z (sqrt(1000*12)*(1/1000*sum(X)-1/2))];
end;
xbasc();
xtitle("Illustration du theoreme central-limit
pour des variables aleatoires de loi U(0,1)");
histplot([-3:0.2:3],Z);
plot2d([-3:0.05:3],1/sqrt(2*%pi)*exp(-1/2*[-3:0.05:3].^2));
endfunction;

//Illustration de la loi des grands nombres

function lfgn(n,lambda)
X=grand(1,n,"exp",lambda);
xbasc();
xtitle("Illustration de la loi des grands nombres
pour des variables aleatoires de loi E(lambda)");
plot2d([1:n],cumsum(X)./[1:n],3);
plot2d([1:n],lambda*ones(1,n),5);
endfunction;

//Exemple de simulation de variables aleatoires par methode du rejet

function rejet()
X=zeros(1,10000);
for i=1:10000;
x=rand(1,2);
while x(2) > sin(%pi*x(1)),
x=rand(1,2);
end,
X(i)=x(1);
end;
```

```
xbasc();
histplot(100,X);
Y=[0:0.05:1];
plot2d(Y,%pi*sin(%pi*Y)/2);
endfunction;


//Exemple de simulation de melange de lois

function melange(n)
X=grand(1,n,"exp",1/2);
Y=grand(1,n,"exp",1);
Z=grand(1,n,"def");
W=(Z<1/3).*Y+(Z>1/3).*X;
xbasc();
xtitle("Melange d une E(1/2) et d une E(1)");
histplot([0:0.05:5],W);
plot2d([0:0.05:5],1/3*exp(-[0:0.05:5])+4/3*exp(-2*[0:0.05:5]),5);
endfunction;
```

3.2 Etude d'une chaîne de Markov

```
//Etude d'une chaine de Markov

//n=100 (longueur de la trajectoire) P=matrice de
transition de la chaine X0=etat initial

function trajectoire(n,P,X0)
T=grand(n,"markov",P,X0);
X=[X0 T];
xbasc();
xtitle("Une trajectoire de la chaine de Markov");
plot2d(1:(n+1),X,5);
legends(["trajectoire"],[5],1);
endfunction;


//Pour une chaine irredusctible de noyau P, on illustre la convergence
// presque sure de la frequence empirique vers la valeur
de la probabilite invariante
//X0 = etat initial  p1=valeur de pi(1)
```

```
function ergodique(n,P,X0,p1)
T=grand(n,"markov",P,X0);
X=[X0 T];
S=1.*(X==1);  //on etudie l'etat 1
V=cumsum(S);
xbasc();
xtitle("Illustration du theoreme ergodique");
plot2d(1:(n+1),V./(1:(n+1)),5);
plot2d(1:(n+1),p1*ones(1:(n+1)),2);
legends(["frequence empirique de 1";"p1"],[5;2],1);
endfunction;



//Etude de la convergence en loi de la chaine dans le cas ergodique
// b=mesure initiale

function convloi(n,P,b)
M=[b];
for j=2:n
M=[M ; M(j-1,:)*P];
end;
M=M';
xbasc();
xtitle("Convergence en loi de la chaine de Markov");
for k=1:8
plot2d(1:n,M(k,1:n),k);
end;
endfunction;

//Test du chi2 d'adequation de la loi de X_1 .. X_15 à
la probabilite invariante (partant de X_0=1)
//Graphique donnant la p-valeur, et estimation de
la probabilite de succes sous H0 par monte carlo
//chi2(15,MTF,1,u,100,100)

function chi2(N,P,X0,b,K,MC)
c=cdfchi("X",7,0.95,0.05);

U=[];
for n=1:N

res=[];
```

```
for k=1:MC



Z=[];

for i=1:K
S=grand(n,"markov",P,X0);
Z=[Z S(1,n)];
end;

R=[];
for j=1:8
u=sum(1*(Z==j));
R=[R u];
end;

D=sum(((K*b).^(-1)).*((R-K*b).^2));

res=[res 1*(D<c)];
end;

U=[U mean(res)];
end;

A=grand(1,200,"def");


xbasc();

subplot(211);
xtitle("Test du chi 2");
plot2d(1:N,U,5);
legends(["probabilite de succes sous H0"],[5],4);

subplot(212);
plot2d(1:200,((1:200).^(-1)).*cumsum(A),5);
plot2d(1:200,0.5*ones(1:200),1);
plot2d(1:200,((1:200).^(-1)).*cumsum(A)+1.96/sqrt(12)*sqrt((1:200).^(-1)),6);
plot2d(1:200,((1:200).^(-1)).*cumsum(A)-1.96/sqrt(12)*sqrt((1:200).^(-1)),6);

endfunction;
```

3.3 Etude d'un processus de Poisson

```
//Etude d'un processus de Poisson

// l := intensite du processus , t := intervalle de temps

function poisson(l,t)
N=grand(1,1,"poi",l*t);
T=grand(1,N,"unf",0,t);
M=-sort(-T);
xbasc();
xtitle("Trajectoire d un processus de Poisson");
plot2d2(M,(1:N),5);
legends(["nb de saut"],[5],4);
endfunction;

function res=poisson4(l,t)
N=grand(1,1,"poi",l*t);
T=grand(1,N,"unf",0,t);
M=-sort(-T);
res=M;
endfunction;


//etude asymptotique du processus de poisson

function asympt(l,T)
M=poisson4(l,T);
H=[1:T];
N=[];
for h=H
N=[N,sum(M<=h)];
end;
xbasc();
xtitle("Etude asymptotique de Nt/t");
plot2d([0,H],[0,N./H],2);
plot2d2([0,H],l*ones([0,H]),5);
plot2d2(H,N./H-1.96*sqrt((N(T)/T)).*(H.^(-1/2)),6);
plot2d2(H,N./H+1.96*sqrt((N(T)/T)).*(H.^(-1/2)),6);
legends(["Nt/t";"lambda"],[2;5],4);
endfunction;
```

```
//etude de la loi de Nt a l'aide de la fonction de repartition empirique


function loint(l,t,MC)
D=[];

for i=1:MC
M=poisson4(l,t);
D=[D length(M)];
end;

S=-sort(-D);
X=[(S(1,1)-1) S (S($)+1)];
xbasc();
xtitle("Loi de Nt");
plot2d2([0:0.5:20],cdfpoi("PQ",[0:0.5:20],(l*t)*ones([0:0.5:20])),6);
plot2d2(X,[0:(1/(MC+1)):1],2);
legends(["f d r de la loi de poisson";"f d r empirique"],[6;2],4);
endfunction;
```

3.4 Test du χ^2 d'indépendance

```
//Test du Chi2 d'independance

//realise un test d'independance , M la matrice des proportions
//On pourra reprendre les donnees de Tassi, Methodes statistiques

function res=chi2indep(M)
n=sum(M);
[a b]=size(M);
X=[];
Y=[];

for j=1:b
  Y=[Y sum(M(:,j))];
end;
for i=1:a
  X=[X; sum(M(i,:))];
end;
```

```
D=sum(((M - 1/n*(X*Y)).^2)./(1/n*(X*Y)));
d=(a-1)*(b-1);

k=cdfchi("X",d,0.95,0.05);

res=1*(D<k);

endfunction;
```

3.5 Problème de Dirichlet

```
//Marche aleatoire et probleme de Dirichlet discret
//Voir Benaim, El Karoui, Promenade aleatoire

//sortie calcule le point de sortie d'une trajectoire
dans M partant de (i0,j0)

function res=sortie(M,i0,j0)
i=i0;
j=j0;
while (M(i,j) < 2)
  X=grand(1,1,"def");
  if (X < 1/4) then
    i=i+1;
  elseif ((1/4 <= X)&(X < 1/2)) then
    i=i-1;
  elseif ((1/2 <= X)&(X < 3/4)) then
    j=j+1;
  else
    j=j-1;
   end,
end;
res=[i j];
endfunction;


//dirichlet resoud le probleme de Dirichlet dans M partant de (i0,j0)
pour la fonction f, avec parametre MC

function res=dirichlet(M,f,i0,j0,MC)
Z=[];
for k=1:MC,
```

```
  X=sortie(M,i0,j0);
  Z=[Z f(X(1),X(2))];
end;
res=mean(Z);
endfunction;

//resoud le probleme de Dirichlet discret dans le demi-plan superieur,
compare le resulat avec une loi de Cauchy

function demiplan(N,MC)
R=[];
for i=1:MC
X=0;
Y=1;
while (Y>0)
  X=X+1/N*(2*(grand(1,1,"def") < 0.5)-1);
  Y=Y+1/N*(2*(grand(1,1,"def") < 0.5)-1);
end;
R=[R X];
end;
L=[-10:0.05:10];
xbasc();
xtitle("Etude de la loi de l abscisse de sortie");
plot2d(L,1/%pi*(1+L.^2).^(-1),5);
histplot([-10:0.5:10],R);
endfunction;
```

3.6 Fonctions de répartition empiriques

```
//Convergence en loi, fonctions de répartition empiriques

//I un intervalle de valeurs pour le tracé

function plerf(I,m,v)
X=[];
for i=I
X=[X cdfnor("PQ",i,m,v)];
end;
```

```
plot2d(I,X,3);
endfunction;


//Compare la fonction de repartition empirique avec la
fonction de repartition d'une gaussienne
//Trace un intervalle de confiance asymptotique fourni
par le theoreme de Kolmogorov Smirnov

function frep(I)
xbasc();
xtitle("Convergence de la fonction de repartition empirique d'une gaussienne");
plerf((-3:0.05:3),0,1);
for i=I
X=grand(1,i,"nor",0,1);
Z=-sort(-X);
plot2d2([-3 Z],(0:1/i:1));
plot2d2([-3 Z],(0:1/i:1)+1.36/sqrt(i));
plot2d2([-3 Z],(0:1/i:1)-1.36/sqrt(i));
end;
endfunction;

// Illustre le theoreme de Glivenko Cantelli

function glivenko(N)
X=grand(1,N,"nor",0,1);
G=[];
F=[];
for i=1:N
F=[F cdfnor("PQ",X(1,i),0,1)];
end;
for j=1:N
S=-sort(-X(1,1:j));
T=-sort(-F(1,1:j));
G=[G max(max(abs(1/j*(1:j) - T),abs(1/j*(0:(j-1)) -T)))];
end;

xbasc();
xtitle("Illustration du theoreme de Glivenko Cantelli pour une gaussienne");
plot2d((1:N),G,5);
endfunction;


//Une etude de la convergence en loi pour Kolmogorov Smirnov
```

```
function kolmo(N,MC)
M=[];
for j=1:MC
X=grand(1,N,"exp",1)
S=-sort(-X);
F=1-exp(-S);
M=[M sqrt(N)*max(max(abs(1/N*(1:N)-F),abs(1/N*(0:(N-1))-F)))];
end;
xbasc();
xtitle("Illustration de la convergence en loi - Theoreme de Kolmogorov Smirnov");
histplot(20,M);
endfunction;
```

Références

[1] : Rémi GOBLOT *Algèbre linéaire* Ellipses (?)

[2] : V. Beck, J. Malick, G. Peyré *Objectif Agrégation* H et K (2004)

[3] : Daniel REVUZ *Probabilités* Hermann (?)

[4] : BARBE - LEDOUX *Probabilités* Belin (1998)

[5] : Yves LADEGAILLERIE *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique* ? (?)

[6] : Romain VIDONNE *Groupe circulaire, rotations et quaternions* Ellipses (?)

[7] : F. GANTMACHER *Théorie des matrices tome 2* ? (?)

[8] : Michel ALESSANDRI *Thèmes de géométrie pour l'agrégation* Dunod (?)

[9] : Antoine CHAMBERT-LOIR *Exercices d'analyse tome 3* Masson (?)

[10] : COTTRELL - DUHAMEL *Exercices de probabilités* Cassini (2004)

[11] : Rached MNEIMNE - Frédéric TESTARD *Introduction aux groupes de Lie classiques* Hermann (1994)

[12] : M. COGNET *Algèbre linéaire* ? (?)

[13] : J-C. CARREGA *Théorie des corps : la règle et le compas* ? (?)

[14] : M. COGNET *Algèbre bilinéaire* ? (?)

[15] : FOATA - FUCHS *Calcul des probabilités* Dunod (?)

[16] : J-M. BONY *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques* Editions de l'Ecole Polytechnique (?)

[17] : DEMAILLY *Analyse numérique* ? (?)

[18] : Ivan GOZARD *Théorie de Galois* Ellipses (1997)

[19] : J-J. RISLER *Groupes pour la licence 3* Dunod (2006)

[20] : LACOMBE - MASSAT *Exercices d'analyse fonctionnelle* Dunod (?)

[21] : AMAR - MATHERON *Analyse complexe* Cassini (?)

[22] : Alain MONFORT *Cours de Statistique* Economica (?)

[23] : Eric LEICHTNAM *Exercices d'oraux X-ENS tome Algèbre* Ellipses (?)

[24] : Eric LEICHTNAM *Exercices d'oraux X-ENS tome Analyse* Ellipses (?)

[25] : Antoine CHAMBERT-LOIR *Exercices d'analyse tome 1* Masson (?)

[26] : FRANCINOU - GIANELLA - NICOLAS *Oraux X-ENS algèbre tome 1* Cassini (?)

[27] : FRANCINOU - GIANELLA - NICOLAS *Oraux X-ENS algèbre tome 2* Cassini (?)

[28] : FRANCINOU - GIANELLA - NICOLAS *Oraux X-ENS analyse tome 1* Cassini (?)

[29] : FRANCINOU - GIANELLA NICOLAS *Oraux X-ENS analyse tome 2* Cassini (?)

[30] : P. SAUX-PICART et E. RANNOU *Cours de calcul formel pour les filles* Ellipses (?)

[31] : Rémi GOBLOT *Algèbre commutative* Dunod (?)

[32] : H. BREZIS *Analyse fonctionnelle* Dunod (?)

[33] : V. ALEXEEV *Recueil de problèmes d'optimisation* Mir (?)

[34] : ZUILY - QUEFFELEC *Eléments d'analyse pour l'agrégation 2eme édition* Dunod (?)

[35] : Y et R. SORTAIS *Géométrie de l'espace et du plan* ? (?)

[36] : DOSS BACHELET - PIQUET *Géométrie différentielle avec 80 figures* Ellipses (?)

[37] : F. ROUVIERE *Petit guide de calcul différentiel* Cassini (?)

[38] : BENAIM - EL KAROUI *Promenade aléatoire* Editions de l'Ecole Polytechnique (2004)

[39] : Jean DIEUDONNE *Calcul infinitésimal* Hermann (?)

[40] : Jean-Yves OUVRARD *Probabilités tome 2* Cassini (?)

[41] : Claude WAGSHAL *Dérivation et intégration* Hermann (1997)

[42] : Denis SERRE *Les matrices* Dunod (?)

[43] : S. FRANCINOU - H. GIANELLA *Exercices de mathématiques pour l'agrégation* Masson (?)

[44] : Stéphane GONNORD et Nicolas TOSEL *Topologie et analyse fonctionnelle* Ellipses (?)

[45] : MARDEN *Geometry of polynomials* ? (?)

[46] : GRAS - GRAS *Algèbre fondamentale et arithmétique* Ellipses (?)

[47] : TISSERON *Géométrie affine et projective* ? (?)

[48] : Guy LAVILLE *Courbes et surfaces* Ellipses (?)

[49] : Michel WILLEM *Analyse harmonique réelle* Hermann (?)